

# Zur Theorie der Sondenstörungen im Neutronenfeld

Von M. A. VIGON und K. WIRTZ

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

Otto Hahn zum 75. Geburtstag

(Z. Naturforsch. 9a, 286—291 [1954]; eingegangen am 10. Februar 1954)

Eine Sonde verringert die Dichte des umgebenden Neutronenfeldes. Die Sonde zeigt infolgedessen zu wenig an und stört außerdem benachbarte Sonden. Man muß deshalb an den Angaben einer Sonde Korrekturen anbringen. Sie werden mit Hilfe der elementaren Diffusionstheorie berechnet, und zwar für Kugelsonden, sowie für unendlich ausgehende und endliche Kreisscheibensonden.

## 1. Formulierung des Problems

Zur Ausmessung von Neutronenfeldern benutzt man häufig sog. radioaktive Sonden. In einer geeigneten Sondensubstanz, z. B. einer Indiumfolie, werden durch die Absorption von Neutronen radioaktive Isotope erzeugt, deren Aktivität ein Maß für die Intensität der Neutronenstrahlung ist. Da die absorbierende Sonde die Neutronenintensität stört, müssen Korrekturen angebracht werden, die z. B. dann von Bedeutung sind, wenn verschiedene Sonden oder verschiedene Streumediten verglichen werden. Diese Sondenkorrekturen wurden u. a. von Bothe<sup>1</sup> behandelt. Für die folgenden Untersuchungen, die sich z. Tl. an Bothes Arbeit anlehnen, wird vorausgesetzt, daß das ungestörte Neutronenfeld keinen Dichtegradienten in demjenigen Volumen besitzt, in dem die Sondenstörung merklich ist, bzw. daß ein etwa vorhandener Dichtegradient des ungestörten Feldes neben demjenigen, den die Sonde in ihrer Umgebung hervorruft, bei der Berechnung der Korrektur vernachlässigt werden kann. Außerdem sollen die Störungen klein sein.

Es seien  $\varrho_0$  und  $C_0$  die Neutronendichte und die Sondenaktivierung, die dem ungestörten Feld entsprechen würden,  $\varrho$  und  $C$  die im gestörten Feld wirklich vorhandenen. Unter der Aktivierung  $C$  wird dabei die in der Sekunde in der Volumeneinheit der Sondensubstanz erzeugte Zahl aktivierter Isotope verstanden. An der Sondenoberfläche soll  $\varrho_s$  die wirklich vorhandene Neutronendichte, bzw. deren über die Sondenoberfläche genommener Mittelwert sein. Die Aufgabe bestehe darin, folgende Größen zu bestimmen:

$$\frac{\varrho_0 - \varrho(r)}{\varrho_s} = \frac{\Delta \varrho(r)}{\varrho_s} = \kappa(r) \quad (1)$$

<sup>1</sup> W. Bothe, Z. Phys. 120, 437 [1943].

= relative Dichtestörung des Feldes in der Umgebung der Sonde als Funktion des Abstandes  $r$  von der Sonde;

$$\frac{\varrho_0 - \varrho_s}{\varrho_s} = \frac{\Delta \varrho_s}{\varrho_s} = \kappa_s \quad (2)$$

= relative Dichtestörung des Feldes, an der Sondenoberfläche;

$$\frac{C_0 - C}{C} = \frac{\Delta C}{C} = \kappa_c \quad (3)$$

= relative Aktivierungsstörung in der Sonde.

Die Störung der zu messenden Sondenaktivität ist proportional der der Aktivierung  $C$ ;  $\kappa_c$  liefert also auch die Aktivitätskorrektur.

Im folgenden werden homogen mit Sondensubstanz gefüllte Kugelsonden (Kugelradius  $R$ ) und kreisförmige Scheibensonden (Kreisradius  $R$ , Dicke  $\delta$ ) betrachtet. Der Absorptionskoeffizient der Sondensubstanz für die betrachteten Neutronen sei  $\mu$ . Für den Fall geringer Sondendicke (Kugel:  $\mu R \ll 1$ ; Scheibe  $\mu \delta \ll 1$ ) kann man die Dichtestörung ohne nähere Betrachtung des Absorptionsvorgangs behandeln (Abschnitt 2). Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so muß an Hand eines geeigneten Ausdrucks für die Strahlungsintensität des Feldes die Absorption im einzelnen untersucht werden (Abschnitte 3 und 4). Die sich dabei ergebenden allgemeineren Ausdrücke gehen in den Grenzfällen kleiner Absorption wieder in die zuerst gewonnenen über. In dem die Sonde umgebenden Medium soll die elementare Diffusionstheorie gelten; nur in dem Maß, in dem diese Voraussetzung erfüllt ist, sind die Resultate der Abschnitte 2 und 4 brauchbar. Es sei also  $\lambda_a \gg \lambda_t$  ( $\lambda_a$  = Absorptionsweglänge,  $\lambda_t$  = Transportweglänge); außerdem sollen die Sondendimensionen groß gegen die Streuweglänge sein:  $R \gg \lambda_s$  (vgl.<sup>1</sup>). In der Sondensubstanz selbst sei  $\lambda_t \gg \lambda_a$ .



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

## 2. Dichtestörung von Sonden geringer Absorption

Falls die Sonde dünn ist, d. h. der Weg, den das Neutron im Sondeninneren zurücklegen kann, klein gegen die Absorptionsweglänge im Sondenmaterial ist, ist die Neutronendichte in der ganzen Sonde praktisch gleich  $\varrho_s$ . Die Störung des Feldes durch die Sonde ist klein. Für  $R \gg \lambda_t$  ist dann, wie sich später ergeben wird:

$$\kappa_c \approx \kappa_s. \quad (4)$$

Die Dichtekorrektur läßt sich einfach berechnen, wenn man die Sonde als negative Quelle betrachtet, deren Quellstärke der Dichte  $\varrho_s$  an der Sondenoberfläche proportional ist.

a) *Kugelsonde*. In der Umgebung der Kugel ist die ungestörte Dichte  $\varrho_0$  verringert, und zwar ist, mit  $L$ =Diffusionslänge des Streumediums,

$$\varrho_0 - \varrho(r) = \Delta\varrho(r) = \frac{a}{r} e^{-r/L}. \quad (5)$$

Da für  $r=R$

$$\Delta\varrho_s = \frac{a}{R} e^{-R/L}, \quad (6)$$

wird (5)

$$\Delta\varrho(r) = \Delta\varrho_s \frac{R}{r} e^{-(r-R)/L}. \quad (7)$$

Die Unbekannte  $\Delta\varrho_s$  erhält man aus der Überlegung, daß die Sonde offenbar in der Umgebung insgesamt die Neutronenzahl um den Betrag verringert:

$$4\pi \int_R^\infty \Delta\varrho(r) \cdot r^2 dr. \quad (8)$$

Wird dies mit der Absorptionswahrscheinlichkeit  $v = \sigma_a N v$  ( $v$ =Neutronengeschwindigkeit,  $\sigma_a$ =Absorptionsquerschnitt der Streusubstanz,  $N$ =Anzahl Atome im ccm) multipliziert, so erhält man die sekundlich von der Sonde absorbierten Neutronen. Diese Zahl ist andererseits bei schwach absorbierenden Sonden gleich der Dichte  $\varrho_s$  multipliziert mit der Absorptionswahrscheinlichkeit in der Sonde  $v_s \frac{4\pi}{3} R^3$  ( $v_s = \mu v$ =Absorptionswahrscheinlichkeit der Sonden substanz;  $\mu$ =Absorptionskoeffizient der Sonden substanz). Es wird also

$$4\pi \int_R^\infty \Delta\varrho(r) r^2 dr = \frac{4\pi}{3} R^3 v_s \varrho_s. \quad (9)$$

Die Integration liefert unter Berücksichtigung von  $L^2 = \frac{1}{3} \lambda_a \lambda_t$ :

$$\kappa(r) = \kappa_s \frac{R}{r} e^{-(r-R)/L}; \quad \kappa_s = \frac{\mu R^2}{\lambda_t} \frac{L}{R+L}. \quad (10)$$

Das Resultat vereinfacht sich in den Grenzfällen

$$R \ll L: \kappa_s = \frac{\mu R^2}{\lambda_t}; \quad R \gg L: \kappa_s = \frac{\mu R L}{\lambda_t}. \quad (11)$$

b) *Unendlich ausgedehnte Kreisscheibe* ( $R \gg L$ ). Wie im Fall der Kugel betrachtet man die Scheibe als negative Quelle, die je  $\text{cm}^2$  und Sekunde die Anzahl  $\varrho_s v_s \delta$  Neutronen absorbiert. Diese Anzahl ist gleich demjenigen Neutronenstrom, der von beiden Seiten in die Sonde hineindiffundiert:

$$\varrho_s v_s \delta = 2D \left( \frac{d\Delta\varrho(z)}{dz} \right)_{z=0} \quad (12)$$

( $D$ =Diffusionskonstante im Streumedium,  $z$ =Richtung senkrecht zur Sondenoberfläche). Die Lösung der Diffusionsgleichung für das ebene Problem lautet

$$\Delta\varrho = \Delta\varrho_s e^{-z/L}. \quad (13)$$

Damit wird

$$\left( \frac{d\Delta\varrho(z)}{dz} \right)_{z=0} = -\frac{\Delta\varrho_s}{L}.$$

Aus (12) folgt damit die Dichtestörung

$$\kappa(z) = \kappa_s e^{-z/L}; \quad \kappa_s = \frac{3}{2} \frac{\mu \delta L}{\lambda_t}. \quad (14)$$

c) *Endliche Kreisscheibe*. Man denkt sich die Kreisscheibe  $S = \pi R^2$  aus negativen Punktquellen zusammengesetzt

$$dQ = \varrho_s v_s \delta dS; \quad (15)$$

$\varrho_s$  sei in 1. Näherung konstant auf der ganzen Scheibe. Eine Punktquelle  $dQ$  des Punktes  $A$  der

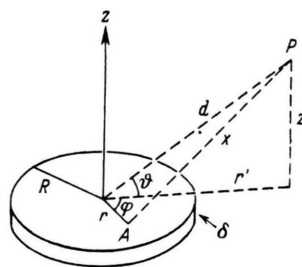


Abb. 1.

Sonde gibt im Abstand  $x$  im Punkt  $P$  folgenden Beitrag zur Neutronendichte (Abb. 1):

$$d\Delta\varrho = \frac{dQ}{4\pi v L^2} \frac{1}{x} e^{-x/L}. \quad (16)$$

Der Beitrag der gesamten Kreisscheibe in  $P$  ist

$$\Delta\varrho = \frac{\varrho_s v_s \delta}{4\pi v L^2} \int_S \frac{1}{x} e^{-x/L} dS. \quad (17)$$

Das allgemeine Integral würde man erhalten mit

$$x = \sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos \vartheta \cos \varphi}. \quad (18)$$

In dem einfacheren Fall, daß  $P$  auf der  $z$ -Achse liegt, ist  $x = \sqrt{r^2 + z^2}$ . Damit folgt aus (17), wenn man wieder  $L$ ,  $v$  und  $v_s$  wie oben ersetzt, für die Störung in der Nähe der  $z$ -Achse

$$\kappa(z) = \frac{3}{2} \frac{\mu \delta L}{\lambda_t} (e^{-z/L} - e^{-\sqrt{z^2 + R^2}/L}), \quad (19)$$

$$\kappa_s = \frac{3}{2} \frac{\mu \delta L}{\lambda_t} (1 - e^{-R/L}). \quad (20)$$

Für  $R \gg L$  gehen die Ausdrücke (19) und (20) in den entsprechenden (10) für die unendliche Scheibensonde über. Für  $R \ll L$  und  $z$  wird

$$\kappa(z) = \kappa_s \frac{R}{2z} e^{-z/L}; \quad \kappa_s = \frac{3}{2} \frac{\mu \delta R}{\lambda_t}. \quad (21)$$

Die oben gemachte Voraussetzung, daß die Neutronendichte  $\varrho_s$  auf der ganzen SONDENSCHIBE konstant sei, ist in Wirklichkeit nicht erfüllt. Um einen Überblick über die wirklichen Verhältnisse zu erhalten, betrachten wir das Integral (17) für den Fall  $z=0$ . Dann wird statt (18)

$$x = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi}. \quad (22)$$

Führt man dies in (17) ein, so kann man die mittlere Störung  $\overline{\Delta \varrho_s}$  auf der ganzen SONDENoberfläche bilden, indem man den Verlauf der gestörten Dichte über die SONDENSCHIBE mittelt

$$\begin{aligned} \overline{\Delta \varrho_s} &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \Delta \varrho_s r' dr' d\varphi \\ &= \frac{\varrho_s v_s \delta}{2\pi v L^2 R^2} \int_0^R r' dr' \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{-\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi}/L}}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Die Integration läßt sich für zwei Grenzfälle durchführen. Für  $R/L \gg 1$  führt sie erwartungsgemäß auf das Ergebnis (14) für die unendlich ausgedehnte Scheibensonde.

Für  $R/L \ll 1$  kann die Exponentialfunktion näherungsweise 1 gesetzt werden. Dann wird

$$\begin{aligned} \overline{\kappa_s} &= \frac{v_s \delta L}{2\pi v R^2} \frac{R^3}{L^3} \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}} \\ &= \frac{3}{2} \frac{\mu \delta R}{\lambda_t} W. \end{aligned} \quad (24)$$

Das ist bis auf den Faktor  $W$  das Resultat (21). Die Integration liefert

$$W = \frac{8}{3\pi} = 0,85. \quad (25)$$

Da die Mittelung von der Annahme  $\varrho_s = \text{konst.}$  auf der ganzen Scheibe ausgeht, ist dies nur eine 1. Näherung. Der wirkliche Wert von  $\overline{\kappa_s} \cdot \left(\frac{3}{2} \frac{\mu \delta R}{\lambda_t}\right)^{-1}$

dürfte bei den praktisch vorkommenden Sonden noch etwas näher bei 1 liegen. Wenn schließlich  $R$  und  $L$  vergleichbar sind, wird man eine angenäherte Interpolationsformel durch folgende Darstellung erhalten:

$$\overline{\kappa_s} = \frac{3}{2} \frac{\mu \delta L}{\lambda_t} \left(1 - e^{-0,85 R/L}\right). \quad (26)$$

### 3. Mittlere Absorptionswahrscheinlichkeit stärker absorbierender Sonden

Durch die Beschränkung auf kleine Sondenabsorption war es im letzten Abschnitt möglich, die Neutronendichte im Innern der Sonde näherungsweise konstant und gleich  $\varrho_s$  zu setzen. Im allgemeinen jedoch muß die Neutronenabsorption bzw. die Aktivierung genauer berechnet werden. Wieder sei die Dichte  $\varrho_0$  des ungestörten Feldes im Sondenbereich konstant. Die gestörte Strahlungsintensität in der Umgebung der Sonde werde angesetzt als Entwicklung nach Kugelfunktionen  $P_\nu(\cos \vartheta)$  des Winkels  $\vartheta$ , den die betrachtete Strahlungsrichtung mit der Verteilungsachse bildet, um die das Feld in jedem Punkt rotationssymmetrisch ist, d. h. es sei  $K(\vartheta) d\Omega$  die Anzahl Neutronen, die in der Sekunde aus dem Raumwinkelement  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  auf die senkrecht zur Strahlungsrichtung liegende Flächeneinheit treffen. Diese Verteilungsachse ist z. B. im Fall der kugelsymmetrischen Störung der Radiusvektor durch den betrachteten Feldpunkt.

$$\begin{aligned} K(\vartheta) &= \frac{1}{4\pi} \sum_\nu (2\nu + 1) K_\nu P_\nu \\ &= \frac{1}{4\pi} K_0 + \frac{3}{4\pi} K_1 \cos \vartheta + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Wir beschränken uns im folgenden auf die ersten beiden Glieder dieser Entwicklung. In dieser Schreibweise ist bekanntlich  $K_0 = \varrho v = \text{Fluß}$ . Die Näherung  $K_1 = -\lambda_t/3 \text{ grad } K_0$  und  $K_\nu = 0$  für  $\nu \geq 2$  entspricht der elementaren Diffusionstheorie. Zur Berechnung der Sondenkorrekturen gehen wir ähnlich vor wie Bothe<sup>1</sup>. Hierzu ist es zunächst notwendig, die mittlere Absorptionswahrscheinlichkeit  $\varepsilon$  eines Neutrons des Feldes (27) in der Sonde zu berechnen. Ist die je Sekunde von außen nach innen durch  $1 \text{ cm}^2$  der Sondenoberfläche tretende Neutronenzahl  $j^+$ , die von innen nach außen  $j^-$ , so gilt

$$\begin{aligned} j^+ &= 2\pi \int_0^1 K |\cos \vartheta| d \cos \vartheta \\ &= \frac{1}{2} \sum_\nu (2\nu + 1) K_\nu P_\nu |\cos \vartheta| d \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (28)$$

$$j^- = 2\pi \int_{-1}^0 K |\cos \vartheta| d \cos \vartheta \quad (28)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \sum_{\nu} (2\nu + 1) K_{\nu} P_{\nu} |\cos \vartheta| d \cos \vartheta.$$

Die Integration ergibt

$$j^+ = \frac{1}{2} \sum_{\nu} (2\nu + 1) K_{\nu} j_{\nu}^+, \quad j^- = \frac{1}{2} \sum_{\nu} (2\nu + 1) K_{\nu} j_{\nu}^-. \quad (29)$$

Die ersten beiden Koeffizienten lauten je

$$j_0^+ = j_0^- = \frac{1}{2}; \quad j_1^+ = -j_1^- = \frac{1}{3}. \quad (30)$$

Die mittlere Absorptionswahrscheinlichkeit  $\varepsilon$  ist definiert durch

$$j^+ - j^- = \varepsilon j^+. \quad (31)$$

Im folgenden bestimmen wir zunächst  $\varepsilon$  für die Kugelsonde.

a) *Kugelsonde*. Die Kugel vom Radius  $R$  befinde sich im Strahlungsfeld (27). Wir fragen nach der Absorption  $dC_k$ , die ein aus dem Winkелеlement  $d\Omega$  auf das Flächenelement  $d\omega = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi'$  der Kugeloberfläche unter dem Winkel  $\vartheta$  gegen den Radiusvektor auftreffender Neutronenstrahl der Intensität  $K(\vartheta) d\Omega$  in der Kugelsubstanz erleidet.

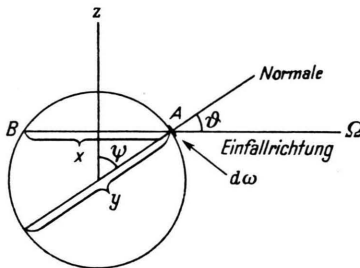


Abb. 2.

Der Strahl durchläuft die Strecke  $AB = 2R \cos \vartheta$  (Abb. 2). An der Stelle  $x$  hat er eine Intensität proportional  $K e^{-\mu x}$  ( $\mu$  = Absorptionskoeffizient der Sondensubstanz). Auf der Strecke  $x$  bis  $x + dx$  wird pro  $\text{cm}^2$  und sec absorbiert

$$dC_k = K e^{-\mu x} \cos \vartheta \mu dx d\omega d\Omega, \quad (32)$$

wobei  $\cos \vartheta$  die scheinbare Verkleinerung des Flächenelementes  $d\omega$  für einen Strahl im Winkel  $\vartheta$  berücksichtigt. Setzt man nach Abb. 3  $x = y \cos \vartheta$ , so erhält man die Gesamtabsorption der Kugel aus

$$C_k = \int d\Omega \int d\omega \int_0^{2R} \mu dy K e^{-\mu y \cos \vartheta} \cos^2 \vartheta. \quad (33)$$

Die Integration liefert die Gesamtabsorption in der Form

$$C_k = 2\pi R^2 \sum_{\nu} (2\nu + 1) K_{\nu} C_{\nu}^k \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots) \quad (34)$$

mit

$$C_{\nu}^k = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2R} e^{-\mu y \cos \vartheta} \mu dy \cos^2 \vartheta P_{\nu} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (35)$$

Die beiden ersten Koeffizienten lauten:

$$C_0^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu R} e^{-2\mu R} - \frac{1}{(2\mu R)^2} (1 - e^{-2\mu R}), \quad (36)$$

$$C_1^k = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\mu R} e^{-2\mu R} + \frac{2}{(2\mu R)^2} e^{-2\mu R} - \frac{2}{(2\mu R)^3} (1 - e^{-2\mu R}).$$

Für  $\mu R \ll 1$  vereinfachen sie sich zu

$$C_0^k = \frac{2}{3} \mu R; \quad C_1^k = \frac{1}{2} \mu R. \quad (37)$$

Die Absorptionswahrscheinlichkeit der Kugel wird nach (31):

$$\varepsilon_k = \frac{C_k}{4\pi R^2 j^+}. \quad (38)$$

Würden für Strom und Absorption die Entwicklungen nach dem ersten Glied abgebrochen, so wäre im Falle  $\mu R \ll 1$ :

$$\varepsilon_k = \frac{4}{3} \mu R. \quad (39)$$

b) *Scheibensonde*. Eine Scheibe der Dicke  $\delta$  mit dem Absorptionskoeffizienten  $\mu$  befinde sich im Strahlungsfeld (27). Wir fragen nach der Absorption  $dC_s$ , die ein aus dem Winkелеlement  $d\Omega$  auf  $1 \text{ cm}^2$  der Scheibenoberfläche auftreffender Neutronenstrahl der Intensität  $K(\vartheta) d\Omega$  in der Scheibensubstanz im Abstand  $x$  von der Sondenoberfläche erleidet. Offenbar ist die Intensität an der Stelle  $x$  (Abb. 3):

$$K(\vartheta, x) = K(\vartheta, 0) e^{-\mu x / \cos \vartheta}. \quad (40)$$

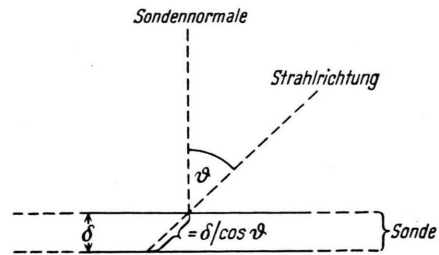


Abb. 3.

Zwischen  $x$  und  $x + dx$  beträgt deshalb die Absorption

$$dC_s = K(\vartheta, 0) e^{-\mu x / \cos \vartheta} \mu dx d\Omega. \quad (41)$$

Die gesamte Absorption der auf einer Sonden-seite eindringenden Strahlung ist

$$C_s = 2\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^\delta K(\vartheta) e^{-\mu x / \cos \vartheta} \mu dx \sin \vartheta d\vartheta. \quad (42)$$

Die Integration liefert  $C_s$  in der Form

$$C_s = \frac{1}{2} \sum_\nu (2\nu + 1) K_\nu C_\nu^s \quad (43)$$

mit

$$C_\nu^s = \int_0^{\pi/2} \int_0^\delta e^{-\mu x / \cos \vartheta} P_\nu \mu dx \sin \vartheta d\vartheta. \quad (44)$$

Die beiden ersten Koeffizienten lauten

$$\begin{aligned} C_0^s &= \frac{1}{2} \left[ 1 - (1 - \mu\delta) e^{-\mu\delta} + \mu^2 \delta^2 \text{Ei}(-\mu\delta) \right], \\ C_1^s &= \frac{1}{3} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\mu\delta}{2} + \frac{\mu^2 \delta^2}{2} \right) e^{-\mu\delta} - \frac{\mu^3 \delta^3}{2} \text{Ei}(-\mu\delta) \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

Für  $\mu\delta \ll 1$  vereinfachen sie sich zu

$$C_0^s = \mu\delta; \quad C_1^s = \frac{1}{2} \mu\delta. \quad (46)$$

Für die Absorptionswahrscheinlichkeit  $\varepsilon_s$  der Scheibensonde erhält man nach (31)

$$\varepsilon_s = C_s / j^+. \quad (47)$$

Würden die Entwicklungen für Strom und Absorption nach dem ersten Glied abgebrochen, so wäre im Falle  $\mu\delta \ll 1$

$$\varepsilon_s = 2\mu\delta. \quad (48)$$

Die Ausdrücke  $C_0^s$  hat bereits Bothe abgeleitet. Die Ausdrücke (38) und (47) für die Absorptionswahrscheinlichkeiten wurden offenbar ohne Zuhilfenahme der elementaren Diffusionstheorie gewonnen und sind deshalb frei von den durch sie verursachten Einschränkungen.

#### 4. Sondenkorrekturen stärker absorbierender Sonden

a) *Kugelsonde*. Mit Hilfe der im vorangehenden Abschnitt abgeleiteten Größe  $\varepsilon_k$  kann nunmehr die Dichte- und die Aktivierungsstörung von Kugelsonden berechnet werden. Wir beschränken uns wieder auf den Fall der Gültigkeit der elementaren Diffusionstheorie in der Umgebung der Sonde. Wir gehen von der Lösung (5) der Diffusionsgleichung für die Störung aus und drücken die Konstante  $a$  mit Hilfe von (28) und (31) nach Bothe durch  $\varepsilon_k$  aus

$$a = \frac{\frac{3}{2} \varepsilon_k \frac{R}{\lambda_t}}{\frac{3}{2} \varepsilon_k \frac{R}{\lambda_t} + (2 - \varepsilon_k) \left( 1 + \frac{R}{L} \right)} \varrho_0 R e^{R/L}. \quad (49)$$

Damit erhält man aus (5) die Dichtestörung

$$\kappa(r) = \kappa_s \frac{R}{r} e^{-(r-R)/L}; \quad \kappa_s = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_k}{2 - \varepsilon_k} \frac{R}{\lambda_t} \frac{L}{R + L}. \quad (50)$$

Man kann ferner die in (3) definierte Aktivierungsstörung  $\kappa_c$  berechnen. Man erhält sie aus dem Verhältnis der gestörten ( $C$ ) und der ungestörten ( $C_0$ ) Aktivierung mittels

$$\frac{1}{1 + \kappa_c} = \frac{C}{C_0} = \frac{j^+ \varepsilon_k}{j_0 \varepsilon_k} = \frac{\frac{1}{4} \varrho v + \frac{1}{6} \lambda_t |\text{grad } \varrho v|_s}{\frac{1}{4} \varrho_0 v}. \quad (51)$$

Bildet man wieder  $\varrho_s$  und  $|\text{grad } \varrho|_s$  nach (5) mit  $a$  nach (49), so folgt:

$$\kappa_c = \frac{3 \varepsilon_k}{4} \frac{R}{\lambda_t} \frac{L}{R + L} - \frac{\varepsilon_k}{2} \quad (52)$$

Dieses Resultat hat zuerst Bothe abgeleitet, allerdings ohne  $\varepsilon_k$  zu kennen.

b) *Unendlich ausgedehnte Scheibensonde* ( $R \gg L$ ). Die Lösung (13) der Diffusionsgleichung in der Umgebung der Sonde schreiben wir in der Form

$$\varrho = \varrho_0 - a e^{-z/L} \quad (53)$$

Wie bei der Kugelsonde kann man die Konstante  $a$  mittels (28) und (31) durch  $\varepsilon_s$  ausdrücken

$$a = \frac{\frac{3}{2} \frac{\varrho_0}{\lambda_t} \varepsilon_s}{\frac{2 - \varepsilon_s}{L} + \frac{3}{2} \frac{1}{\varepsilon_s} \frac{1}{\lambda_t}}. \quad (54)$$

Damit wird die Dichtestörung in der Umgebung der Sonde

$$\kappa(z) = \kappa_s e^{-z/L}; \quad \kappa_s = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_s}{2 - \varepsilon_s} \frac{L}{\lambda_t}. \quad (55)$$

Analog wie in (51) erhält man ferner für die Störung der Aktivierung

$$\kappa_c = \frac{3}{4} \varepsilon_s \frac{L}{\lambda_t} - \frac{\varepsilon_s}{2}. \quad (56)$$

Heisenberg<sup>2</sup> hat für die unendlich ausgedehnte Scheibe die Dichtestörung für den Fall eines stärker absorbierenden Streumediums ( $\lambda_a \approx \lambda_t$ ) angegeben, in dem die einfache Diffusionstheorie nicht gilt;  $\varepsilon_s$  wurde nicht berechnet. Für  $\lambda_a \gg \lambda_t$  geht sein Resultat in unsere Gl. (55) über.

c) *Endliche Kreisscheibe*. In diesem Fall gehen wir zunächst von dem Ausdruck (17) für  $\Delta \varrho$  auf der  $z$ -Achse aus. An die Stelle der negativen Quelle

<sup>2</sup> W. Heisenberg, Theorie der Neutronen, Göttingen 1952.



$\varrho_s \nu_s \delta dS$  muß hier ein Ausdruck der Form  $a \cdot v \cdot dS$  treten, wo  $a$  wieder eine durch  $\varepsilon_s$  auszudrückende Konstante und  $v$  die Neutronengeschwindigkeit ist. Die Integration über  $dS$  liefert

$$\Delta \varrho = \varrho_0 - \varrho = \frac{3aL}{2\lambda_t} (e^{-z/L} - e^{-\sqrt{z^2 + R^2}/L}). \quad (57)$$

Daraus folgt für  $z=0$

$$\varrho_s = \varrho_0 - \frac{3aL}{2\lambda_t} (1 - e^{-R/L}); \quad |\text{grad } \varrho|_s = \frac{3a}{2\lambda_t}. \quad (58)$$

Hiermit und mittels (28) und (31) folgt

$$a = \frac{\varrho_0 \varepsilon_s}{2 - \varepsilon_s + \frac{3}{2} \frac{L}{\lambda_t} \varepsilon_s (1 - e^{-R/L})} \quad (59)$$

Führt man  $a$  in (57) ein, so liefern (57) und (58) zunächst die Dichtestörung auf der  $z$ -Achse

$$\kappa(z) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_s}{2 - \varepsilon_s} \frac{L}{\lambda_t} (e^{-z/L} - e^{-\sqrt{z^2 + R^2}/L}) \quad (60)$$

$$\kappa_s = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_s}{2 - \varepsilon_s} \frac{L}{\lambda_t} (1 - e^{-R/L}) \quad (61)$$

Für  $R \gg L$  erhält man die Ausdrücke (55) für die unendliche Scheibensonde. Für  $R \ll L$  wird außerdem

$$\kappa_s = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_s}{2 - \varepsilon_s} \frac{R}{\lambda_t} \quad (62)$$

Für die Aktivierungskorrektur erhält man schließlich analog wie in (56):

$$\kappa_c = \frac{3\varepsilon_s}{4} \frac{L}{\lambda_t} (1 - e^{-R/L}) - \frac{\varepsilon_s}{2} \quad (63)$$

und für  $R \ll L$

$$\kappa_c = \frac{3\varepsilon_s}{4} \frac{R}{\lambda_t} - \frac{\varepsilon_s}{2}. \quad (64)$$

An Stelle von (57) erhält man, wenn man nicht nur Punkte auf der  $z$ -Achse betrachtet, ähnlich wie in (23) für die Sondenoberfläche ( $z=0$ )

$$\Delta \varrho_s = \frac{av}{4\pi v L^2} \iint \frac{e^{-\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi}/L}}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi}} r dr d\varphi \quad (65)$$

und für die mittlere Störung

$$\overline{\Delta \varrho_s} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \Delta \varrho_s r' dr'. \quad (66)$$

Ebenso wie bei (23) läßt sich die Integration für zwei Grenzfälle durchführen. Für  $R/L \gg 1$  wird man auf das Ergebnis (55) für die unendlich ausgedehnte Scheibensonde geführt.

Für  $R/L \ll 1$  erhält man entsprechend (24)

$$\overline{\Delta \varrho_s} = \frac{3}{2} a \frac{R}{\lambda_t} W \quad (67)$$

mit  $W = \frac{8}{3\pi} = 0,85$ . Da  $\overline{\varrho_s} = \varrho_0 - \overline{\Delta \varrho_s}$  wird schließlich

$$\overline{\kappa_s} = \frac{\overline{\Delta \varrho_s}}{\varrho_s} = \frac{\frac{3}{2} a \frac{R}{\lambda_t} W}{\varrho_0 - \frac{3}{2} a \frac{R}{\lambda_t} W}. \quad (68)$$

Einführen von  $a$  nach (54) liefert

$$\overline{\kappa_s} = \frac{\frac{3}{2} \frac{\varepsilon_s}{2 - \varepsilon_s} \frac{R}{\lambda_t} W}{1 + (1 - W) \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_s}{2 - \varepsilon_s} \frac{R}{\lambda_t}} \approx \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_s}{2 - \varepsilon_s} \frac{R}{\lambda_t} W. \quad (69)$$

Ist  $R \ll L$  nicht erfüllt, so schlagen wir wie in Abschnitt 2 vor, in dem Ausdruck (61) die Größe  $R$  durch  $0,85 R$  zu ersetzen:

$$\overline{\kappa_s} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_s}{2 - \varepsilon_s} \frac{L}{\lambda_t} (1 - e^{-0,85 R/L}). \quad (70)$$

Auf die experimentelle Prüfung unserer Ergebnisse kommen wir zurück. Herrn Professor Heisenberg danken wir für wichtige Ratschläge.